УДК 517.9

К. Н. Солтанов

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. ОДНОВРЕМЕННОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ КОМПАКТНОСТИ И МОНОТОННОСТИ

Изучена эллиптическая задача, которая может быть представлена в виде суммы псевдомонотонного и слабо компактного операторов, действующих в пространствах Соболева. Представлена также эллиптико-параболическая задача, т. е. начально-краевая задача для уравнения с «двойной» нелинейностью. Метод компактности здесь основан на теоремах вложения для нелинейных пространств, приведенных в работе.

Рассматривается задача с уравнением «двойной» нелинейности

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(u)-\sum_{i=1}^{n} D_iA_i(x,t,u,Du)+f(x,t,u)=0, \quad (x,t)\in Q, \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad x\in\Omega\subset\mathbf{R}^n \quad (n\geqslant 1), \tag{2}$$

$$u(x;\,t)|_\Gamma=\psi(x',t), \quad \Gamma\equiv\partial\Omega\times[0,T), \quad x'\in\partial\Omega, \tag{3}$$

где Ω — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $Q\equiv\equiv\Omega\times(0,T)$, а ρ, A_i, f, u_0, ψ — некоторые функции, $D_i\equiv\partial/\partial x_i$.

Когда второе слагаемое имеет, например, вид

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i\,[a_i(x,u)\,D_iu+b_i(x,u,Du)]\equiv T(u), \tag{4}$$

большой интерес представляет изучение краевой задачи для уравнения с этой главной частью, поэтому здесь отдельно рассматривается также эллиптическая задача (п. 2), с главной частью вида (4), а затем изучается задача вида (1) — (3) в п. 3.

Задача типа (1) — (3) ранее рассмотрена при различных условиях во многих работах (см., например, [1—5] и литературу в них). Заметим, что во всех работах предполагается (если привести самый общий вид из [2]), что $A_i\,(x,t,u,Du)$, $f\,(x,t,u)$ зависят от $\rho\,(u)$ в виде $A_i\,(x,t,u,Du)\equiv A_i\,(x,t,\rho\,(u),\nabla u)$, $f\,(x,t,u)\equiv f\,(\rho\,(u))$, и рост нелинейности определяется ростом нелинейности по ∇u, причем второе слагаемое в самом общем случае порождает оператор вариационного исчисления [6] в случае соболевских пространств (т. е. в случае степенной нелинейности) и монотонного оператора в случае пространств Соболева — Орлича [7].

Здесь, как и в работах, посвященных задаче вида (1) — (3), предполагается, что $\rho'\,(\tau)\geqslant 0$, $\rho\,(0)=0$ и $\rho\,(\tau)=\Phi'\,(\tau)$. Кроме того, $\rho\,(\tau)$ возрастает по τ. Для изучения приведенных здесь задач одновременно применяются методы монотонности и компактности. Причем применяется метод компактности, основанной на теоремах вложения для нелинейных пространств [8, 11], именно потому в п. 1 приведены некоторые теоремы вложения для нелинейных пространств.

Следует заметить, что для краткости в настоящей работе рассматриваются только степенные нелинейности, т. е. задачи изучаются в пространствах, соответствующих пространствам Соболева. Отметим также, что уравнение (1) является уравнением с неявным вырождением, причем неявно может вырождаться как первое, так и второе слагаемое.

1. Некоторые нелинейные пространства и теоремы вложения. Пусть Ω и Q — такие же, как выше. Введем следующие классы функций: $u : \Omega \to \mathbf{R}^1$ $(u : Q \to \mathbf{R}^1)$;

$$S_{1,\alpha,\beta}(\Omega) \equiv \left\{ u(x) \,|\, [u]_S^{\alpha+\beta} \equiv \int_\Omega \sum_{i=1}^n |u|^\alpha |D_i u|^\beta dx + \int_\Omega |u|^{\alpha+\beta} dx < +\infty \right\}, \quad (1.1)$$

$$\overset{0}{S}_{1,\alpha,\beta}(\Omega) \equiv S_{1,\alpha,\beta}(\Omega) \cap \{u(x) : u|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad (1.2)$$

$$L_{p_0}(0, T;\ S_{1,\alpha^0,\beta^0}(\Omega)) \equiv \left\{ u(x, t) \,|\, [u]_{L_{p^0}(S)}^{p^0} \equiv \int_0^T [u]_S^{p^0} dt < +\infty \right\}, \quad (1.3)$$

$$L_{p_0}(\Omega;\ S_{1,\alpha_0,\beta_0}(0, T)) \equiv$$

$$\equiv \left\{ u(x, t) \,|\, [u]_{L_{p_0}(S)}^{p_0} \equiv \int_Q |u|^{\alpha_0} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^{\beta_0} dxdt + \int_Q |u|^{\alpha_0+\beta_0} dxdt < +\infty \right\}, \quad (1.4)$$

$$\overset{0}{S}_{1,\alpha,\beta}(Q) \equiv \{u(x, t) \,|\, [u]_{S(Q)}^{\alpha+\beta} \equiv [u]_{L_1(S(0,T))}^{\alpha+\beta} + [u]_{L_p(S(\Omega))}^{\alpha+\beta} < +\infty, u|_\Gamma = 0, (x, 0) = 0\}, \quad (1.5)$$

$$L_{p_0}(\Omega;\ \overset{0}{S}_{1,\alpha_0,\beta_0}(0, T)) \equiv L_{p_0}(\Omega;\ S_{1,\alpha_0,\beta_0}(0, T)) \cap \{u(x, t) : u(x, 0) = 0\}. \quad (1.6)$$

Здесь α, α^0, $\alpha_0 \geqslant 0$, β, β_0, $\beta^0 \geqslant 1$, $p = \alpha + \beta$, $p_0 = \alpha_0 + \beta_0$, $p^0 = \alpha^0 + \beta^0$ — некоторые числа.

Ясно, что определенные здесь пространства являются *п*н-пространствами (см., например, [8, 9] и др.) с введенными там *п*-нормами.

Теорема 1.1. Пусть α_0, α_1, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 1$ — некоторые числа. Тогда если $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, то справедливо следующее включение:

$$S_{1,\alpha_0,\beta}(\Omega) \cap S_{1,\alpha_1,\beta}(\Omega) \subseteq S_{1,\alpha,\beta}(\Omega).$$

Доказательство вытекает из неравенства Юнга (см. [10]).

Теорема 1.2. Пусть α_0, α_1, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 1$ — некоторые числа и $\alpha \geqslant \alpha_0$. Тогда если $\alpha_1 \geqslant 0$ такое число, что $(\alpha + 1)\gamma + \alpha\beta \leqslant \alpha_0 + \alpha_1$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$, справедлива следующая импликация:

$$u(x) \in S_{1,\alpha_0,\beta}(\Omega) \cap S_{1,\alpha_0+\alpha_1,\beta}(\Omega) \Rightarrow \varphi(u) \equiv |u|^\alpha u \in S_{1,\gamma,\beta}(\Omega).$$

Доказательство в силу теоремы 1.1 вытекает из определения пространств $S_{1,\alpha,\beta}(\Omega)$ и результатов работ [8—10].

Теорема 1.3. A. Пусть выполняются условия теоремы 1.1. Тогда компактно следующее вложение: $p \leqslant \alpha_1 + \beta$, $p_0 \geqslant 1$,

$$L_p(0, T;\ S_{1,\alpha_0,\beta}(\Omega) \cap S_{1,\alpha_1,\beta}(\Omega)) \cap W^1_{p_0}(0, T;\ L_{p_0}(\Omega)) \subset L_p(Q).$$

B. Пусть выполняются условия теоремы 1.2. Тогда компактно следующее вложение:

$$\mathscr{P}(Q) \equiv L_{\alpha+\beta}(\Omega;\ S_{1,\alpha,\beta}(0, T)) \cap L_{\alpha_0+\beta}(0, T;\ S_{1,\alpha_0,\beta}(\Omega)) \cap$$
$$\cap\, L_{\alpha_0+\alpha_1+\beta}(0;\ T;\ S_{1,\alpha_0+\alpha_1,\beta}(\Omega)) \subset L_{(\gamma+\beta)(\alpha+1)}(Q).$$

Доказательство. Условие A вытекает из теоремы работы [10] в силу теоремы 1.1.

Из теоремы 1.2 вытекает, что в случае условия B справедлива импликация

$$u(x, t) \in \mathscr{P}(Q) \Rightarrow \varphi(u) \equiv |u|^\alpha u \in L_{\beta+\gamma}(0, T;\ S_{1,\gamma,\beta}(\Omega)) \cap$$
$$\cap\, W^1_{\beta_0}(0, T;\ L_{\beta_0}(\Omega)) \equiv \mathscr{P}_{1,\gamma,\beta,\beta_0}(Q),\ \ \beta_0 = (\alpha + \beta)/(\alpha + 1).$$

Тогда, используя теорему 3 работы [8], получаем утверждение *b*). Действительно, из указанной теоремы вытекает, что компактно вложение

$$\mathscr{P}_{1,\gamma,\beta,\beta_0}(Q) \subset L_{\gamma+\beta}(Q),$$

остается использовать то, что из $u(x, t) \in \mathscr{P}(Q)$ вытекает включение

$$\varphi(u) \in \mathscr{P}_{1,\gamma,\beta,\beta_0}(Q),$$

где $\varphi(u) \equiv |u|^\alpha u$.

Лемма 1.1. Пусть числа $\alpha_0 \geqslant 0$, $p > 1$, $\beta > 1$, такие, что $p^* > \alpha_0 + \beta > p\ (= \alpha + \beta)$. Тогда для некоторого $\beta_0 \geqslant 1$ из ограниченности множества G в $W_p^1(\Omega)$ вытекает, что $\varphi(G)$ содержится в пространстве $L_{\beta_0}(\Omega)$, компактно, где $p^* = np/(n-p)$, $n > p$, $\beta_0 < \dfrac{\alpha_0+\beta}{\alpha+1}$.

Теорема 1.4. Пусть выполняются условия леммы 1.1, $1 \leqslant \beta_0 \leqslant (\alpha_1 + \beta_1)/(\alpha+1)$ — некоторое число, $p_1 = \alpha_1 + \beta_1$. Тогда справедливо соотношение

$$G \subset L_{\alpha+\beta}(\Omega;\, S_{1,\alpha,\beta}(0,T)) \cap L_{p_1}(0,T;\, W_{p_1}^1(\Omega)) \text{ — ограниченное} \Rightarrow \varphi(G) \subset \\ \subset L_{\beta_0}(Q) \text{ (компактно).}$$

Доказательство вытекает из леммы 1.1 и результатов работ [8—10]. Действительно, из леммы 1.1 получаем, что из $u(x,t) \in L_{\alpha+\beta}(\Omega;\, S_{1,\alpha,\beta}(0,T)) \cap L_{p_1}(0,T;\, W_{p_1}^1(\Omega))$ следует $\varphi(u) \in L_{\beta_0}(\Omega;\, W_{\beta_0}^1(0,T)) \cap L_{\beta_1}(0,T;\, W_{\beta_1}^1(\Omega))$, а тогда при $\beta_1 \geqslant \beta_0$ имеем $\varphi(G) \subset L_{\beta_1}(0,T;\, W_{\beta_1}^1(\Omega)) \cap W_{\beta_0}^1(0,T;\, L_{\beta_0}(\Omega))$, и остается использовать известные результаты о компактности вложения из [6] (или из [9—11]).

Теорема 1.5. Пусть выполняются условия леммы 1.1, кроме того, имеет место неравенство $p = \alpha + \beta < q(\alpha+1) \leqslant p^*$. Тогда из $u(x) \in W_p^1(\Omega)$ следует $\varphi(u(x)) \in W_q^1(\Omega)$, $q = \dfrac{p}{p-1}$, $p^* = np/(n-p)$, $p \geqslant \beta \geqslant 2$.

Доказательство теоремы, в силу леммы 1.1, вытекает из следующей последовательности неравенств:

$$\int_\Omega |u|^{\alpha q} |D_i u|^q\, dx \leqslant \int_\Omega |u|^{\alpha q \frac{p_0}{p_0-1}}\, dx + \int_\Omega |D_i u|^{q p_0}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Omega |u|^{p^*}\, dx + \int_\Omega |D_i u|^p\, dx + C, \quad p_0 + 1 = p.$$

Из теоремы 1.5 непосредственно вытекает следствие.

Следствие 1.1. Пусть выполняются условия теоремы 1.5, кроме того,

$$u(x,t) \in L_{\alpha+\beta}(\Omega;\, S_{1,\alpha,\beta}(0,T)) \cap L_{\alpha_0+\beta_0}(0,T;\, W_{\alpha_0+\beta_0}^1(\Omega)).$$

Тогда

$$\varphi(u) \in W_{\beta_2}^1(0,T;\, L_{\beta_2}(\Omega)) \cap L_{\beta_1}(0,T;\, W_{\beta_1}^1(\Omega)),$$

и компактно вложение

$$L_{\alpha+\beta}(\Omega;\, S_{1,\alpha,\beta}(0,T)) \cap L_{\alpha_0+\beta_0}(0,T;\, W_{\alpha_0+\beta_0}^1(\Omega)) \subset L_{\beta_1(\alpha+1)}(Q),$$

где $1 \leqslant \beta_1 \leqslant \dfrac{\alpha_0+\beta_0}{\alpha+1}$, $1 \leqslant \beta_2 \leqslant \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha+1}$ — некоторые числа.

Теперь приведем некоторые утверждения в частном случае, т. е. таком, который непосредственно связан с описанными задачами. Рассмотрим следующий класс пространств:

$$\left\{S_{1,\alpha_\lambda,p_\lambda}(\Omega) \mid \lambda \in \left]\frac{1}{2},\, 1\right]\right\}, \quad \text{где} \quad p_\lambda = \frac{\alpha+2}{\alpha\lambda+1},\ \alpha_\lambda = \alpha\lambda p_\lambda. \tag{1.7}$$

Лемма 1.2. Пусть $\alpha \geqslant 0$ и $\beta = 2$. Тогда из $u(x) \in S_{1,\alpha,2}(\Omega)$ вытекает $|u|^{\alpha/2} u \in W_2^1(\Omega)$ $(u \in \overset{0}{S}_{1,\alpha,2}(\Omega) \Rightarrow |u|^{\alpha/2} u \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$.

Доказательство, в силу определения пространств $S_{1,\alpha,\beta}(\Omega)$, получается из неравенства Юнга и интегральных неравенств из [8, 9]. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.6. Пусть выполняются условия леммы 1.2. Тогда множество (1.7) порождает шкалу нелинейных пространств по вложению, т.е. $S_{1,\alpha_{\lambda_1},p_{\lambda_1}}(\Omega) \subset S_{1,\alpha_{\lambda_2},p_{\lambda_2}}(\Omega)$ при $\lambda_2 > \lambda_1$. Более того, шкала банаховых пространств $\left\{W_{p_\lambda}^1(\Omega) : \dfrac{\alpha+2}{\alpha+1} \leqslant p_\lambda \leqslant 2\right\}$ и (1.7) гомеоморфны, и для каждого $\lambda : \frac{1}{2} \leqslant \lambda \leqslant 1$ этот гомеоморфизм определяется отображением $\varphi_\lambda(u) \equiv \cdot |u|^{\alpha\lambda} u$.

Замечание 1.1. Используя теорему 1.6 и такого типа результаты из работ [8—11], можно доказать теорему об интерполяции в нелинейном случае (построены различные шкалы нелинейных пространств $S_{m,\alpha,\beta}(\Omega)$).

Замечание 1.2. Теорема 1.1 является следствием некоторого мультипликативного неравенства, так как интегральные неравенства, доказанные в работах [8—11], в основном являются мультипликативными неравенствами типа неравенства Гольярдо — Ниренберга.

2. Разрешимость одной эллиптической задачи. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 1$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. В Ω рассматривается задача

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i [a_i(x, u) D_i u + b_i(x, u, Du) + c_i(x, u)] = h(x), \tag{2.1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad D \equiv (D_1, \dots, D_n), \ D_i \equiv \partial/\partial x_i, \tag{2.2}$$

для $u(x) \in \overset{0}{W}{}^1_p(\Omega) \cap \overset{0}{S}_{1,\alpha,2}(\Omega)$, $h(x) \in W_q^{-1}(\Omega) + L_{q_1}(\Omega)$, где $p, q, q_1 \geqslant 1$ — некоторые числа $\alpha \geqslant 0$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

1) функции $b_i(x, \eta, \xi)$, $c_i(x, \eta)$ являются функциями Каратеодори и для некоторых постоянных c_1, $\tilde{c}_1$, b_0, b_1, β, $\beta_1 \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$|b_i(x, \eta, \xi)| + |c_i(x, \eta)| \leqslant \tilde{c}_1 (|\xi_i|^{\beta+1} + |\eta|^{\beta_1}) + b_1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(x, \eta, \xi)\xi_i \geqslant c_1 \left[\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^{\beta+2} - |\eta|^{\beta_1+1}\right] - b_0 \quad \beta_1 < \beta + 1;$$

2) для любой функции $u(x) \in \overset{0}{W}{}^1_p(\Omega)$ имеет место оценка $p = \beta + 2$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} [b_i(x, u, Du) + c_i(x, u)] D_i u dx \geqslant c_2 \|u\|^p_{\overset{0}{W}{}^1_p} - \tilde{c}_2, \ c_2 > 0, \ \tilde{c}_2 \geqslant 0;$$

3) выполнено следующее условие монотонности $\forall\, \xi, \xi' \in \mathbf{R}^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} [b_i(x, \eta, \xi) - b_i(x, \eta, \xi')](\xi_i - \xi_i') \geqslant 0 \quad \forall x \in \Omega, \ \eta \in R^1;$$

4) функции $a_i(x, \eta)$, $i = \overline{1, n}$ являются функциями Каратеодори и для некоторых постоянных c_0, $\tilde{c}_0$, $\alpha \geqslant 0$

$$c_0 |\eta|^\alpha \leqslant a_i(x, \eta) \leqslant \tilde{c}_0 |\eta|^\alpha.$$

Замечание 2.1. Из условия 4 вытекает, что существуют функции Каратеодори $a_i^0(x, \eta)$, $i = \overline{1, n}$, такие, что справедливы неравенства $c_0 \leqslant a_i^0(x, \eta) \leqslant \tilde{c}_0$ и $a_i(x, \eta) \equiv a_i^0(x, \eta)|\eta|^\alpha$, следовательно, функции $a_i^0(x, \eta) \in L^\infty(\Omega)$ и обладают соответствующей гладкостью.

Введем класс функций $u : \Omega \to \mathbf{R}^1$

$$\overset{0}{S}(\Omega) \equiv \overset{0}{S}_{1,\alpha,2}(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}^1_{\beta+2}(\Omega), \quad \alpha, \beta \geqslant 0.$$

Определение 2.1. Функция $u(x)$ называется решением задачи (2.1), (2.2), если она удовлетворяет уравнению (2.1) в смысле пространства $W_{q_0}^{-1}(\Omega) + W_{q_1}^{-1}(\Omega)$ $(u(x) \in \overset{0}{S}(\Omega))$, т. е. для любого $v(x) \in \overset{0}{W}{}^1_p(\Omega)$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \langle a_i(x, u) D_i u + b_i(x, u, Du) + c_i(x, u), D_i v\rangle = \langle h, v\rangle. \tag{2.3}$$

Здесь $p_0 = \alpha + 2$, $p_1 = \beta + 2$, $p = \max\{p_0, p_1\}$, $q_0 = p_0'$, $q_1 = p_1'$, $\langle u, v\rangle \equiv \int\limits_\Omega uvdx$.

Теорема 2.1. Пусть выполняются условия 1—4. Тогда для любого $h(x) \in W_{q_1}^{-1}(\Omega) + L_{q_0}(\Omega)$ задача (2.1) — (2.2) разрешима в $\overset{0}{S}(\Omega)$.

Вначале покажем обобщенную коэрцитивность оператора T, порожденного задачей (2.1) — (2.2).

Лемма 2.1. В условиях теоремы 2.1 оператор T обобщенно коэрцитивен на пространстве $\overset{0}{W}{}_p^1(\Omega)$, более того, для любого $u(x) \in \overset{0}{W}{}_p^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\langle T(u), u\rangle \geqslant c\{\|u\|^{p_1}_{W^1_{p_1}(\Omega)} + [u]^{p_0}_{S_{1,\alpha,2}}\} - \tilde{c},$$

где $c > 0$, $\tilde{c} \geqslant 0$ — некоторые постоянные.

Доказательство. Для любого $u(x) \in \overset{0}{W}{}_p^1(\Omega)$ имеем

$$\langle T(u), u\rangle \equiv -\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n D_i[a_i(x,u)D_iu + b_i(x,u,Du) + c_i(x,u)]udx.$$

Используя здесь условия 1, 3 и 4, получаем

$$\langle T(u), u\rangle = \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega [a_i(x,u)D_iu + b_i(x,u,Du) + c_i(x,u)]D_iudx \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^n c_0 \int\limits_\Omega |u|^\alpha |D_iu|^2 dx + c_1 \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega |D_iu|^{\beta+2} dx - \tilde{c}_1.$$

Тем самым лемма 2.1 доказана.

Отсюда, используя условия на правую часть теоремы 2.1, получаем $h \equiv h_1 + h_2$; $h_1 \in L_{q_0}(\Omega)$, $h_2 \in W_{q_1}^{-1}(\Omega)$

$$|\langle h, u\rangle| \leqslant \|h_1\|_{L_{q_0}(\Omega)}\|u\|_{L_{p_0}(\Omega)} + \|h_2\|_{W^{-1}_{q_1}(\Omega)}\|u\|_{\overset{0}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)}.$$

Таким образом, из леммы 2.1 получаем априорные оценки ($p_1 = \beta + 2$)

$$\|u\|_{\overset{0}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)} \leqslant K, \quad [u]_{S_{1,\alpha,2}(\Omega)} \leqslant K, \quad K > 0 - \mathrm{const}. \tag{2.4}$$

Доказательство теоремы 2.1. Применяя метод Галеркина, при условии, что приближенное решение u_m ищется в виде $u_m(x) \equiv \sum\limits_{k=1}^m c_{mk}u^k$, где $\{u^k\}_{k=1}^\infty$ — полная система функций из $\overset{0}{W}{}_p^1(\Omega)$, получаем, что неизвестные коэффициенты c_{mk}, $k = \overline{1, m}$ находятся из системы алгебраических уравнений

$$\langle T(u_m), u^k\rangle \equiv -\Big\langle \sum_{i=1}^n D_i[a_i(x,u_m)D_iu_m + b_i(x,u_m,Du_m) +$$

$$+ c_i(x,u_m)], u^k\Big\rangle = \langle h, u^k\rangle, \quad k = \overline{1, m}, \tag{2.5}$$

разрешимость которой показывается обычным способом (см., например, [6], с применением варианта теоремы Брауэра о неподвижной точке).

Из априорных оценок (2.4) получаем, что последовательность приближенных решений $\{u_m(x)\}$ является ограниченным множеством в пространстве $\overset{0}{S}(\Omega)$, следовательно, из $\{u_m\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{u_{m_1}\}$, слабо сходящуюся в $\overset{0}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)$ и $\overset{0}{S}_{1,\alpha,2}(\Omega)$, тогда можно сказать (для простоты обозначения менять не будем), что она сильно сходится в $L_{p_1}(\Omega)$, а также в $L_p(\Omega)$, в силу теорем компактности вложения для пространств

Соболева и п. 1. Более того, при $m \to \infty$

$$\begin{gathered} u_m(x) \Rightarrow u_0(x) \ \text{в} \ L_p(\Omega) \ \text{и п. в. в} \ \Omega, \\ |u_m|^\alpha u_m \Rightarrow |u_0|^\alpha u_0 \ \text{в} \ L_{q_0}(\Omega), \\ |D_i u_m|^\beta D_i u_m \rightharpoonup \varkappa(x) \in L_{q_1}(\Omega) \ \text{в} \ L_{q_1}(\Omega), \end{gathered} \tag{2.6}$$

а в силу ограниченности $\{b_i\,(x,\,u_m,\,D_i u_m)\}$, $\{c_i\,(x,\,u_m)\}$ в $L_{q_1}(\Omega)$ и рефлексивности этого пространства получаем: существует некоторая функция $\chi\,(x) \in W_{q_1}^{-1}\,(\Omega)$, такая, что при $m \to +\infty$

$$B\,(u_m) \equiv \sum_{i=1}^{n} D_i b_i\,(x,\,u_m,\,Du_m) \rightharpoonup \chi\,(x), \tag{2.7}$$

кроме того, из условий 1, 2 и (2.6) получаем, что при $m \to +\infty$

$$c_i\,(x,\,u_m) \Rightarrow c_i\,(x,\,u_0) \ \text{в} \ L_{q_1}(\Omega).$$

Тогда, переходя к пределу в (2.5) при $m \to +\infty$ и фиксированном k, а также учитывая полноту системы $\{u^k\}$ в $\overset{0}{W}{}_p^1\,(\Omega)$, получаем

$$\langle T\,(u_m)\,v\rangle \to \left\langle -\sum_{i=1}^{n} D_i\,[a_i\,(x,\,u_0)\,D_i u_0 + c_i\,(x,\,u_0)] + \chi,\,v\right\rangle = \langle h,\,v\rangle. \tag{2.8}$$

Далее, поскольку, как показано в [6], оператор B, порожденный выражением $-\sum_{i=1}^{n} D_i b_i\,(x,\,u,\,Du)$, является псевдомонотонным оператором из $\overset{0}{W}{}_{p_1}^1\,(\Omega)$ в $\overset{0}{W}{}_{q_1}^{-1}\,(\Omega)$, используем свойство псевдомонотонных операторов. А именно, что из $u_m \rightharpoonup u_0$ в $\overset{0}{W}{}_{p_1}^1\,(\Omega)$ и $\lim\sup\,\langle B\,(u_m),\,u_m - u_0\rangle \leqslant 0$ следует,

$$\lim\inf\,\langle B\,(u_m),\,u_m - v\rangle \geqslant \langle B\,(u_0),\,u_0 - v\rangle \quad \forall\,v \in \overset{0}{W}{}_{p_1}^1\,(\Omega).$$

Таким образом, получаем, что для доказательства равенства $\chi = B\,(u_0)$ достаточно показать $\lim\sup\,\langle B\,(u_m),\,u_m - u_0\rangle \leqslant 0$, так как $B : \overset{0}{W}{}_{p_1}^1\,(\Omega) \to W_{q_1}^{-1}\,(\Omega)$ — ограниченный оператор и $u_m \rightharpoonup u_0$ в $\overset{0}{W}{}_{p_1}^1\,(\Omega)$. Переписав (2.5) в виде

$$\left\langle -\sum_{i=1}^{n} D_i b_i\,(x,\,u_m,\,Du_m),\,u^k\right\rangle = \left\langle h + \sum_{i=1}^{n} D_i\,[a_i\,(x,\,u_m)\,D_i u_m + c_i\,(x,\,u_m)],\,u^k\right\rangle,$$

имеем

$$\begin{gathered} \langle B\,(u_m),\,u_m - u_0\rangle = \langle B\,(u_m),\,u_m\rangle - \langle B\,(u_m),\,u_0\rangle = \\ = \left\langle h + \sum_{i=1}^{n} D_i[a_i\,(x,\,u_m)\,D_i u_m + c_i\,(x,\,u_m)],\,u_m\right\rangle - \langle B\,(u_m),\,u_0\rangle = \\ = \langle h,\,u_m\rangle - \sum_{i=1}^{n} [\langle a_i\,(x,\,u_m)\,D_i u_m,\,D_i u_m\rangle - \langle c_i\,(x,\,u_m),\,D_i u_m\rangle] - \langle B\,(u_m),\,u_0\rangle. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Теперь, в силу априорных оценок (2.4) и теоремы 1.6, получаем

$$[a_i^0\,(x,\,u_m)]^{1/2}\,|u_m|^{\alpha/2}\,D_i u_m \rightharpoonup [a_i^0\,(x,\,u_0)]^{1/2}\,|u_0|^{\alpha/2} D_i u_0 \ \text{в} \ L_2\,(\Omega).$$

Тогда, используя известное свойство последовательности норм слабо сходящейся последовательности в банаховом пространстве [12] и переходя к пределу в (2.9) при $m \to +\infty$, получаем

$$\lim\,\langle B\,(u_m),\,u_m - u_0\rangle \leqslant \langle h,\,u_0\rangle - \sum_{i=1}^{n} \|[a_i\,(x,\,u_0)]^{1/2}\,D_i u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\langle c_i(x, u_0), D_iu_0\rangle - \langle\chi, u_0\rangle = \Big\langle h - \sum_{i=1}^{n} D_i[a_i(x, u_0)D_iu_0 +$$

$$+ c_i(x, u_0)], u_0\Big\rangle - \langle\chi, u_0\rangle.$$

Отсюда, в силу равенства (2.8), следует неравенство

$$\limsup\langle B(u_m), u_m - u_0\rangle = \limsup\Big\langle -\sum_{i=1}^{n} D_ib_i(x, m_m, Du_m), u_m - u_0\Big\rangle \leqslant 0,$$

следовательно, для любого $v(x) \in \overset{0}{W}{}^1_p(\Omega)$

$$\liminf\Big\langle -\sum_{i=1}^{n} D_ib_i(x, u_m, Du_m), u_m - v\Big\rangle \geqslant$$

$$\geqslant\Big\langle -\sum_{i=1}^{n} D_ib_i(x, u_0, Du_0), u - v\Big\rangle,$$

откуда и вытекает справедливость равенства $\chi = B(u_0)$.

Таким образом, переходя к пределу в (2.5) при $m \to +\infty$ и учитывая полноту системы $\{u^k\}$ в $\overset{0}{W}{}^1_p(\Omega)$, получаем, что предельный элемент $u_0(x)$ содержится в $\overset{0}{S}(\Omega)$ и является решением задачи (2.1), (2.2) в смысле определения 2.1. Тем самым теорема 2.1 полностью доказана.

Замечание 2.2. Ясно, что теорема 2.1 остается в силе, если к уравнению (2.1) добавить младший член с соответствующими условиями.

3. **Разрешимость эллиптико-параболического уравнения.** В $Q \equiv \Omega \times (0, T)$ рассматривается задача

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(u) - \sum_{i=1}^{n} D_i[a_i(x, t, u)D_iu + b_i(x, t, u, Du)] = h(x, t); \tag{3.1}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \rho(u) \equiv |u|^\rho u; \tag{3.2}$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad \Gamma \equiv \partial\Omega \times [0, T], \tag{3.3}$$

для $u(x, t) \in W^1_p(0, T; \overset{0}{W}{}^1_p(\Omega))$, $h(x, t) \in L_q(0, T; W_q^{-1}(\Omega))$, где $p, q \geqslant 1$.

Предположим, что выполняется еще одно условие в дополнение к четырем условиям п. 2:

функции $a_i(x, t, \eta)$, $b_i(x, t, \eta, \xi)$ являются функциями Каратеодори по $(x, t) \in Q$, $\eta \in \mathbf{R}^1$, $\xi \in \mathbf{R}^n$, причем равномерно по $t \in [0, T]$ выполняются условия теоремы 2.1 (т. е. условия 1) — 4) п. 2).

Введем следующие классы функций:

$$\mathscr{P}(Q) \equiv L_{p_1}(0, T; \overset{0}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)) \cap L_{p_0}(0, T; \overset{0}{S}_{1,\alpha,2}(\Omega)) \cap L_{p_2}(0, T; S_{1,\alpha+\gamma,2}(\Omega)) \cap$$

$$\cap\, \{u(x, t): \rho(u) \in \underset{0}{W}{}^1_q(0, T; W_q^{-1}(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L_q(\Omega))\}, \tag{3.4}$$

$$\mathscr{P}_\varepsilon(Q) \equiv \mathscr{P}(Q) \cap L_{p_3}(\Omega; S_{1,\rho,2}(0, T)), \quad p_2 = \alpha + \gamma + 2, \quad p_3 = \rho + 2, \ \gamma \geqslant 0.$$

Определение 3.1. Функция $u(x, t) \in \mathscr{P}(Q)$ называется решением задачи (3.1) — (3.3), если она удовлетворяет уравнению (3.1) в смысле пространства $L_q(0, T; W_q^{-1}(\Omega))$, т. е. для любого $v \in L_p(0, T; \overset{0}{W}{}^1_p(\Omega))$ выполняется равенство

$$\int_Q \frac{\partial}{\partial t}\rho(u)\,v\,dxdt + \sum_{i=1}^{n}\int_Q [a_i(x, t, u)D_iu + b_i(x, t, u, Du)]D_iv\,dxdt =$$

$$= \int_Q hv\,dxdt, \tag{3.5}$$

где $p = \max\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$, $p_0 = \alpha + 2$, $p_1 = \beta + 2$, $p_2 = \gamma + p_0$, $p_3 = \rho + 2$, $p_4 = p_1 + \gamma$, $q = p' = p/(p-1)$.

Теорема 3.1. Пусть выполняется условие 5, кроме того, пусть $\gamma \geqslant 0$, такое число, что имеет место одно из условий:

a) если $\rho \geqslant \alpha$, $\rho + 2 \geqslant \overset{*}{p}_1$, то γ, такое, что $\gamma + \alpha \geqslant \rho$;

b) если $\rho < \alpha$, то γ, такое, что для некоторого $r > 1$ имеет место неравенство $r(\rho + 1) + 2\rho \leqslant \alpha + \gamma$;

c) если $\rho + 2 < \overset{*}{p}_1$, то γ, такое, что $\rho < \beta + \gamma$.

Тогда для любого $h(x, t) \in L_{q_0}(Q) + L_{q_2}(0, T; W_{q_2}^{-1}(\Omega))$, $1 < q_2 = \frac{p_1 + \gamma}{p_1 - 1}$ задача (3.1) — (3.3) разрешима в $\mathcal{P}(Q)$, определенном по γ из условий *a*), *b*) или *c*).

Для доказательства используются эллиптическая регуляризация и методы компактности и монотонности, как в п. 2.

Итак, вначале изучается разрешимость следующей эллиптической задачи с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$-\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho(u_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(u_\varepsilon) - \sum_{i=1}^{n} D_i [a_i(x, t, u_\varepsilon) D_i u_\varepsilon + b_i(x, t, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)] = h(x, t), \tag{3.6}$$

$$u_\varepsilon(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho(u_\varepsilon)|_{t=T} = 0, \quad x \in \Omega; \tag{3.7}$$

$$u_\varepsilon|_\Gamma = 0, \quad \Gamma \equiv \partial\Omega \times [0, T). \tag{3.8}$$

Аналогично определению 3.1 решением задачи (3.6) — (3.8) называется функция $u_\varepsilon(x, t) \in \mathcal{P}_\varepsilon(Q)$, удовлетворяющая уравнению (3.6) в смысле пространства $W_q^{-1}(0, T; W_q^{-1}(\Omega))$, т. е. для любого $v(x, t) \in \underset{0}{W_p^{-1}}(0, T; \overset{0}{W_p^1}(\Omega))$ выполняется равенство

$$\varepsilon \int_Q \frac{\partial}{\partial t} \rho(u_\varepsilon) \frac{\partial v}{\partial t} dxdt + \int_Q \frac{\partial}{\partial t} \rho(u_\varepsilon) v dxdt + \sum_{i=1}^{n} \int_Q [a_i(x, t, u_\varepsilon) D_i u_\varepsilon + b_i(x, t, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)] D_i v dxdt = \int_Q h(x, t) v(x, t) dxdt. \tag{3.9}$$

Лемма 3.1. В условиях теоремы 3.1 уравнение (3.9) разрешимо в пространстве $\mathcal{P}_\varepsilon(Q)$ для любого $v \in W_p^1(0, T; \overset{0}{W_p^1}(\Omega)) \cap \{u(x, t) \mid u(x, 0) = 0\}$.

Перед тем как перейти к доказательству теоремы 3.1, докажем лемму 3.1, а затем разрешимость задачи (3.6) — (3.8), и наконец, используя эти результаты, докажем теорему 3.1.

Доказательство леммы 3.1. Вначале покажем обобщенную коэрцитивность оператора T_ε, порожденного задачей (3.6) — (3.8) (или уравнением (3.9)). Для $u_\varepsilon(x, t) \in W_p^1(0, T; \overset{0}{W_p^1}(\Omega)) \cap \{u(x, t)\, u(x, 0) = 0\}$ имеем

$$\langle T_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon + |u_\varepsilon|^\gamma u_\varepsilon\rangle \equiv -\varepsilon \int_Q \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho(u_\varepsilon)(|u_\varepsilon|^\gamma u_\varepsilon + u_\varepsilon) dxdt + \int_Q \left\{\frac{\partial}{\partial t} \rho(u_\varepsilon) - \sum_{i=1}^{n} D_i [a_i(x, t, u_\varepsilon) D_i u_\varepsilon + b_i(x, t, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)]\right\} \times (|u_\varepsilon|^\gamma u_\varepsilon + u_\varepsilon) dxdt,$$

учитывая здесь условие 5, получаем

$$\langle T_\varepsilon(u_\varepsilon), u_\varepsilon + |u_\varepsilon|^\gamma u_\varepsilon\rangle \geqslant \varepsilon \int_Q [(\rho + 1)|u_\varepsilon|^\rho + (\rho + 1)(\gamma + 1)|u_\varepsilon|^{\rho+\gamma}] \left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right|^2 \times dxdt + \int_Q \left[\frac{\partial |u_\varepsilon|^{\rho+2}}{\partial t} (\rho + 2)^{-1}(\rho + 1) + \frac{\rho + 1}{\rho + \gamma + 2} \frac{\partial |u_\varepsilon|^{\rho+\gamma+2}}{\partial t}\right] dxdt +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} c_0 \int_Q [\,|u_\varepsilon|^\alpha + (\gamma+1)\,|u_\varepsilon|^{\alpha+\gamma}]\,(D_i u_\varepsilon)^2\,dxdt + c_1 \|u_\varepsilon\|^{p_1}_{W^{0,1}_{p_1}(Q)} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_1 \int_Q |u_\varepsilon|^\gamma\,|D_i u_\varepsilon|^{\rho+2}\,dxdt - c_2 \geqslant \varepsilon\,[u_\varepsilon]^{\rho+2}_{L_{p_2}(\Omega;S_{1,\rho,2}(0,T))} +$$

$$+\varepsilon\,[u_\varepsilon]^{\rho+\gamma+2}_{L_{p_4}(\Omega;S_{1,\rho+\gamma,2}(0,T))} + k_0\,[u_\varepsilon]^{p_0}_{L_{p_0}(0,T;S_{1,\alpha,2}(\Omega))} + k_1\,[u_\varepsilon]^{p_0+\gamma}_{L_{p_0+\gamma}(0,T;S_{1,\alpha+\gamma,2}(\Omega))} +$$

$$+ k_2 \|u_\varepsilon\|^{p_1}_{W^{0,1}_{p_1}(Q)} + k_3\,[u_\varepsilon]^{p_1+\gamma}_{L_{p_1+\gamma}(0,T;S_{1,\gamma,\beta+2}(\Omega))} - k_4,$$

что и показывает обобщенную коэрцитивность оператора T_ε.

Далее, в условиях теоремы 3.1 для правой части получаем

$$|\langle h, u_\varepsilon + |u_\varepsilon|^\gamma u_\varepsilon\rangle| \leqslant \left|\int_Q h\,(u_\varepsilon + |u_\varepsilon|^\gamma u_\varepsilon)\,dxdt\right| \leqslant \|h_1\|_{L_{q_1}(0,T;W^{-1}_{q_1}(\Omega))} \times$$

$$\times \|u_\varepsilon\|_{L_{p_1}(0,T;\overset{0}{W}{}^1_{p_1}(\Omega))} + \|h_1\|_{L_{q_4}(\Omega)}\|u_\varepsilon\|^{\gamma+1}_{L_{p_4}(0,T;\overset{0}{S}_{1,\gamma\beta_1,\beta_1}(\Omega))} + \|h_2\|_{L_{q_0}(Q)}\|u_\varepsilon\|_{L_{p_0}(Q)} +$$

$$+\|h_2\|_{L_{q_2}(Q)}\|u_\varepsilon\|^{\gamma+1}_{L_{p_2}(Q)},\quad p_2 = \alpha+\gamma+2,\quad q_2 = p_2/(p_2-1),$$

$$h(x) \equiv h_1(x) + h_2(x),\quad h_1 \in W^{0,-1}_{q_2}(Q),\quad h_2 \in L_{q_0}(Q),$$

$$\beta_1 = p_4/(\gamma+1).$$

Таким образом, получаем справедливость следующих априорных оценок:

$$\varepsilon\,[u_\varepsilon]_{L_{p_2}(\Omega;S_{1,\rho,2}(0,T))} \leqslant k,\quad \varepsilon\,[u_\varepsilon]_{L_{p_2+\gamma}(\Omega;S_{1,\rho+\mu,2}(0,T))} \leqslant k,$$

$$\|u_\varepsilon\|_{W^0_{p_1}(0,T;\overset{0}{W}{}^1_{p_1}(\Omega))} \leqslant k,\quad [u_\varepsilon]_{L_{p_0}(0,T;S_{1,\alpha,2}(\Omega))} \leqslant k, \tag{3.10}$$

$$[u_\varepsilon]_{L_{p_0+\gamma}(0,T;S_{1,\alpha+\gamma,2}(\Omega))} \leqslant k,\quad [u_\varepsilon]_{L_{p_1+\gamma}(0,T;S_{1,\alpha,2}(\Omega))} \leqslant k.$$

Применяя метод Галеркина и используя обычную процедуру (см. п. 2 и [6]), получаем последовательность приближенных решений $\{u_{\varepsilon m}\}$, каждое из которых является решением системы уравнений

$$-\varepsilon\left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho(u_{\varepsilon m}), u^k\right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\rho(u_{\varepsilon m}), u^k\right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{n} D_i\,[a_i(x,t,u_{\varepsilon m})\,D_i u_{\varepsilon m} +\right.$$

$$\left. + b_i(x,t,u_{\varepsilon m}, Du_{\varepsilon m})],\, u^k\right\rangle = \langle h, u^k\rangle,\quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.11}$$

При этом приближенное решение ищется в виде $|u_{\varepsilon m}|^\gamma u_{\varepsilon m} + u_{\varepsilon m} \equiv \equiv \sum_{k=1}^{m} c_{mk} u^k$, где неизвестные коэффициенты c_{mk}, $k = \overline{1, m}$ находятся из системы (3.11).

Далее, в силу априорных оценок (3.10) имеем $\{u_{\varepsilon m} \mid \varepsilon > 0,\ m = 1, 2, \ldots\}$ — ограниченное множество из $\mathscr{P}_\varepsilon(Q)$. Следовательно, из теорем 1.1—1.5 вытекает, что справедливы соотношения

$$u_{\varepsilon m}(x,t) \Rightarrow u_\varepsilon(x,t) \text{ в } L_p(Q) \text{ и п. в. в } Q,$$

$$|u_{\varepsilon m}|^\rho u_{\varepsilon m} \Rightarrow |u_\varepsilon|^\rho u_\varepsilon \text{ в } L_{q_3}(Q), \tag{3.12}$$

$$|u_{\varepsilon m}|^\alpha u_{\varepsilon m} \Rightarrow |u_\varepsilon|^\alpha u_\varepsilon \text{ в } L_{q_0}(Q),$$

$$|D_i u_{\varepsilon m}|^\beta D_i u_{\varepsilon m} \Rightarrow \varkappa \in L_{q_1}(Q) \text{ слабо в } L_{q_1}(Q) \text{ при } m \to \infty$$

(для простоты на подпоследовательность переходить не будем).

Отсюда, рассуждая, как и в п. 2, получаем справедливость леммы 3.1; другими словами, доказательство леммы завершается так же, как доказательство теоремы 2.1.

Доказательство теоремы 3.1. Необходимо показать, что можно переходить к пределу при $\varepsilon \to 0$ в уравнении (3.9), а для этого следует доказать разрешимость задачи (3.6) — (3.8) и существование априорных оценок для $\frac{\partial}{\partial t}\rho(u_\varepsilon)$, не зависящих от $\varepsilon : \varepsilon \to 0$.

Перепишем (3.9) в следующем виде для любого $v \in W_p^{1,1}(Q)$:

$$-\left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho(u_\varepsilon), v\right\rangle = \left\langle h - \frac{\partial}{\partial t}\rho(u_\varepsilon) + \sum_{i=1}^{n} D_i\,[a_i(x, t, u_\varepsilon) D_i u_\varepsilon + \right.$$

$$\left. + b_i(x, t, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)], v\right\rangle. \qquad (3.13)$$

Отсюда, аналогично тому, как это сделано в [10, 11], находим $\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho(u_\varepsilon) \in L_q(0, T;\ W_q^{-1}(\Omega))$. Следовательно, $\frac{\partial}{\partial t}\rho(u_\varepsilon)|_{t=T}$ имеет смысл, и используя известную процедуру, получаем, что $\frac{\partial}{\partial t}\rho(u_\varepsilon)|_{t=T} = 0$ (см., например, [6, 8 — 11]).

Таким образом, показана разрешимость задачи (3.6) — (3.8). Учитывая это и используя равенство (3.13) для любого $v(x, t) \in \overset{0}{W}{}_p^1(0, T;$ $L_p(\Omega)) \cap L_p(0, T;\ W_p^1(\Omega))$, общий вид функционала над этим пространством, его сепарабельность и возможность представления полной системы в нем в виде произведения полных систем функций в пространствах $L_p(0, T)$ и $W_p^1(\Omega)$, получаем, что $u_\varepsilon(x, t)$ является решением задачи

$$-\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho(u_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(u_\varepsilon) = f_\varepsilon(t)\left(= h(t) + \sum_{i=1}^{n} D_i\,[a_i(x, t, u_\varepsilon, D_i u_\varepsilon + \right.$$

$$\left. + b_i(x, t, u_\varepsilon, Du_\varepsilon)]\right), \quad u_\varepsilon(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho(u_\varepsilon)|_{t=T} = 0, \qquad (3.14)$$

решая которую (см. [9.11]), получаем равномерную ограниченность по ε $\left\{\frac{\partial}{\partial t}\rho(u_\varepsilon)\right\}$ в пространстве $L_q(0, T;\ W_q^{-1}(\Omega))$ при $\varepsilon \to 0$, так как правая часть, в силу априорных оценок (3.10), равномерно ограничена в $L_q(0, T;\ W_q^{-1}(\Omega))$, и, следовательно, пробегает ограниченное множество в нем при $\varepsilon \to 0$.

Далее, рассуждая точно так же, как в [6, 9, 11], и учитывая те новые моменты, которые были при доказательствах теоремы 2.1 и леммы 3.1 с использованием теоремы 1.6, получаем, что можно переходить к пределу в (3.9) при $\varepsilon \to 0$. Тогда, переходя к пределу в (3.9) при $\varepsilon \to 0$ и замыкая $v(x, t)$ в $L_p(0, T;\ \overset{0}{W}{}_p^1(\Omega))$, получаем разрешимость задачи (3.1) — (3.3) и то, что предельная функция $u(x, t)$ содержится в $\mathscr{P}(Q)$ и является решением этой задачи в смысле определения.

Тем самым теорема 3.1 полностью доказана.

Замечание 3.1. Ясно, что замечание 2.2 о младшей части справедливо также и в этом случае.

1. *Alt H. W., Luckhaus S.* Quazilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z.— 1983.— 183, N 3.— P. 311—341.
2. *Kačur J.* On a solution of degenerate elliptic-parabolic systems in Orlicz-Sobolev espaces // Ibid.— 1990.— 203, N 1.— Pt. I.— P. 153—171; N 3.— Pt. II.— P. 569—579.
3. *Benilan P.* Existence des solutions fortes pours l'equations des milieux poreux // C. R. Acad. Paris. Ser. A.— 1974.— 278.— P. 1029—1032.
4. *Crandall M. G.* An introduction to evolution governed byaccretive operator // Dinamical systems (Proc. Intern. sympos.— 1974.— Brown Univ.) — New York : Academ. Pres, 1975.
5. *Galaktionov V. A.* Best possible upper bound for blowup solutions quasilinear hest conductivity equations with source // SIAM. Math. Anal.— 1991.— 22, N 5.— P. 1293—1302.
6. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М. : Мир, 1972.— 587 с.
7. *Gossez J.-P.* Nonlinear elliptic boundary value problems for rapidly (or slowly) increasing coefficients // Trans. Amer. Nath. Soc.— 1974.— 190.— P. 163—205.
8. *Солтанов К. Н.* Некоторые теоремы вложения и их приложения к нелинейным уравнениям // Некоторые вопросы теории линейных и нелинейных уравнений — Баку, 1985.— С. 127—146.

9. *Солтанов К. Н.* О разрешимости некоторых нелинейных параболических задач // Дифференц. уравнения.— 1980.— **16**, № 5.— С. 882—887.
10. *Солтанов К. Н.* Об одной нелинейной задаче параболического типа // Докл. АН АзССР.— 1983.— **39**, № 1. —С 11—14.
11. *Солтанов К. Н.* Теоремы вложения для нелинейных пространств и разрешимость некоторых нелинейных некоэрцитивных уравнений.— Баку, 1991.— 71 с.— Деп. в ВИНИТИ 16.09.91, № 3697.
12. *Иосида К.* Функциональный анализ.— М. : Мир, 1967.— 624 с.

Ин-т математики и механики
АН Азербайджана, Баку

Получено 18.12.91